Zur

Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der

zweiten Sektion der hohen philosophischen Fakultät

der

Kgl. Bayr. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

von

Hermann Fried
aus Bamberg.

München 1897.

Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547427_0055

Zur

Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der

zweiten Sektion der hohen philosophischen Fakultät

der

kgl. bayr. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

von

Hermann Fried
aus Bamberg.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

München 1897.

Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Lossen.

Die vorliegende Arbeit ist auf eine Anregung des Herrn Prof. Lindemann hin entstanden. Sie soll nichts anderes sein, als eine Ergänzung zu einer Abhandlung, welche Herr Voigt in Göttingen im 28. Bande der mathematischen Annalen unter dem gleichen Titel veröffentlicht hat.

Es schien zweckmässig, ohne allzu eingehende Erläuterung dem Original die für die weitere Ausführung notwendigen Gleichungen zu entnehmen; wer diese nicht auf Treu und Glauben als richtig hinnehmen will, für den wird nichts anderes übrig bleiben, als selbst die Abhandlung des Herrn Voigt nachzulesen. Ein Auszug würde den Ansprüchen solcher Leser vermutlich doch nicht genügt haben.

Bemerkt mag noch werden, dass zur Behandlung der gestellten Aufgabe weder die Theorie der elliptischen Funktionen, noch sonst irgend eines der höheren Hilfsmittel der modernen Mathematik in Anwendung gebracht werden musste.

„Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen".

Unter diesem Titel hat Herr Voigt im 28. Band der mathematischen Annalen einen Aufsatz veröffentlicht, in dem er folgende Aufgabe behandelt:

Die kinetische Energie von n Flüssigkeitsstrahlen, die aus dem Unendlichen kommen und sich in derselben Ebene bewegen, sei im Unendlichen pro Volumeneinheit konstant und für alle dieselbe. Es soll der stationäre Zustand beschrieben werden, der durch das Zusammentreffen dieser Strahlen entsteht, für den Fall, dass die von der Flüssigkeit überdeckte Fläche einfach zusammenhängt.

In jenem Aufsatze wird eine Methode entwickelt, nach welcher eine Lösung des genannten Problems gegeben werden kann. Sie ist für den Fall wirklich durchgeführt, dass man es nur mit zwei Strahlen zu thun hat; auch sind die Grenzbedingungen ausschliesslich für diesen Fall aufgestellt und erörtert. Es soll nun im Folgenden bewiesen werden, dass auch für ein Zusammentreffen von mehr als zwei Strahlen die Aufgabe in derselben Vollständigkeit gelöst werden kann, die Herr Voigt für zwei Strahlen erreicht hat. Da also dieser Aufsatz nur eine Ergänzung zu den Ausführungnn der citierten Abhandlung bilden soll, so wird es wohl gestattet sein, vorauszusetzen, dass dem Leser der Inhalt derselben im wesentlichen bekannt ist.

Der Abhandlung sei zunächst Folgendes entnommen:

Die Orte der Flüssigkeitselemente sind in der Ebene der Bewegung durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x und y festgelegt. Ferner ist eine Grösse z definiert durch die Gleichung $z = x + i y$. Eine Funktion von z, die $\Omega = \Phi + i \Psi$ genannt ist, hat nun die Eigenschaft, dass ihr reeller Teil, Φ, irgend einer Konstanten gleichgesetzt, jedesmal eine Kurve konstanten Geschwindigkeitspotentials ergibt, während ihr imaginärer Teil, Ψ, ebenfalls irgend einer Konstanten gleichgesetzt, jedesmal die Gleichung einer Stromkurve liefert. Die Aufgabe ist offenbar gelöst, sobald die Funktion ermittelt ist, die Ω und z verbindet.

Herr Voigt hat für den allgemeinen Fall den Zusammenhang zwischen Ω und einer komplexen Variablen ζ' in analytischer Form angegeben. ζ' wird mit einer weiteren komplexen Grösse ζ'', diese wieder mit einer komplexen Variablen ζ in bestimmter Weise durch geometrische Beziehungen verknüpft. ζ hat folgende einfache Bedeutung: Legt man das Koordinatensystem der ζ-Ebene parallel und in gleiche Richtung mit dem der z-Ebene, so bedeutet der absolute Wert von ζ, reciprok genommen, die Grösse der Geschwindigkeit jenes Flüssigkeitelementes z, welches dem ζ entspricht, und die Linie vom Koordinatenanfangspunkt nach ζ hat die Richtung jener Geschwindigkeit. Schliesslich besteht zwischen Ω, ζ und z folgende einfache Beziehung:

$$(1)\quad z = \int \zeta \, d\Omega \, .$$

Die Gleichung zwischen Ω und ζ' hat bei Voigt folgende Form:

$$(2)\quad \Omega = \frac{i}{2\pi}\Big[(a_1-b_1)\,\alpha'_1 + (b_1-a_2)\,\beta'_1 + (a_2-b_2)\,\alpha'_2 + \ldots + (a_n-b_n)\,\alpha'_n + 2\pi \cdot b_n\Big] + \frac{1}{\pi}\Big[(a_1-b_1)\,\lg\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}\,e^{-i\alpha'_1}\Big) + (b_1-a_2)\,\lg\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}\,e^{-i\beta'_1}\Big) + \ldots + (b_n-a_1)\,\lg\Big(1-\frac{\zeta'}{R'}\Big)\Big],$$

wo ζ' eine zu bestimmende Funktion von ζ ist.

Dabei haben die Buchstaben i, π, e die Bedeutung, die man ihnen in der Analysis beizulegen gewohnt ist. Alle Grössen, die wir nicht bereits besprochen haben, bedeuten reelle Konstante. Zwischen denselben bestehen folgende Ungleichungen:

$$(3)\quad a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ \ldots\ a_n > b_n;$$

$$(4)\quad a_2 > b_1,\ a_3 > b_2,\ \ldots\ a_1 > b_n \text{ und}$$

$$(5)\quad 0 < \alpha'_1 < \beta'_1 < \alpha'_2 < \beta'_2 < \ldots < \alpha'_n < 2\pi.$$

Um für spätere Rechnungen eine einfachere Schreibweise zu erhalten, führen wir für die Konstanten folgende andere Bezeichnungen ein; es sei

$$(6)\quad \frac{a_1-b_1}{\pi} = c_1;\ \frac{a_2-b_2}{\pi} = c_3;\ \ldots\ldots\ \frac{a_n-b_n}{\pi} = c_{2n-1};$$
$$\frac{b_1-a_2}{\pi} = c_2;\ \frac{b_2-a_3}{\pi} = c_4;\ \ldots\ldots\ \frac{b_n-a_1}{\pi} = c_{2n};\ \text{und}$$

$$(7)\quad \alpha'_1 = \gamma'_1;\ \alpha'_2 = \gamma'_3;\ \ldots\ldots\ \alpha'_n = \gamma'_{2n-1};$$
$$\beta'_1 = \gamma'_2;\ \beta'_2 = \gamma'_4;\ \ldots\ldots\ \beta'_n = \gamma'_{2n} = 2\pi.$$

Aus den Ungleichungen (3) schliesst man, dass alle c mit ungeradem Index positiv, aus den Ungleichungen (4), dass alle c mit geradem Index negativ werden. Statt (5) erhält man:

(8) $0 < \gamma'_1 < \gamma'_2 < \gamma'_3 < \gamma'_4 \ldots < \gamma'_{2n-1} < 2\pi.$

Es bedeute k eine ganze Zahl, die der Reihe nach die Werte 1 bis 2n incl. annimmt. Durch Addition der Gleichungen (6) erhält man:

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (c_k) = 0.$$

Gleichung (2) erhält die Form:

$$(10) \quad \Omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{k=2n} (c_k \gamma'_k) + i \cdot a_1 + \sum_{k=1}^{k=2n} \left[c_k \cdot \lg\left(1 - \frac{\zeta'}{R'} e^{-i\gamma'_k}\right)\right].$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus:

$$(11) \quad \frac{d\Omega}{d\zeta'} = \sum_{k=1}^{k=2n} \left(\frac{c_k}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \right).$$

Der Wert von $d\Omega$ kann in Gleichung (1) eingesetzt werden. Man erhält:

$$(12) \quad z = \sum_{k=1}^{k=2n} \left(c_k \int \frac{\zeta \, d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \right).$$

Es wird sich zunächst darum handeln, die hier angedeutete Integration auszuführen. Zu diesem Zwecke muss aus den von Herrn Voigt angegebenen geometrischen Beziehungen eine algebraische Gleichung zwischen ζ und ζ' hergeleitet werden.

2.

Derjenige Bereich der Punkte ζ', der überhaupt in Betracht kommt, bedeckt das Innere eines Kreises vom Radius R' um den Koordinatenanfangspunkt der einblättrigen Ebene ζ'. Dieser Kreis soll zunächst in einer (n—1)-blättrigen Ebene ζ'' so auf einem Kreis vom beliebigen Radius R'' um den Koordinatenanfangspunkt konform abgebildet werden, dass die Punkte des ersteren, die durch die Wurzeln einer sogleich anzuführenden Gleichung gegeben sind, in letzterem übereinander und zwar in den Mittelpunkt fallen. Die erwähnte Gleichung ist

$$(13) \quad \frac{d\Omega}{d\zeta'} = \sum_{k=1}^{k=2n} \left(\frac{c_k}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \right) = 0. \quad \text{(Vgl. 11.)}$$

Diese Gleichung hat, wie Herr Voigt ausführlich bewiesen hat, gerade nur (n—1) Wurzeln, die in das Innere des Kreises R' fallen. Dieselben mögen mit $r_1 e^{i\varphi_1}$, $r_2 e^{i\varphi_2}$, ... $r_h e^{i\varphi_h}$, ... $r_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}}$ bezeichnet und unter h eine ganze Zahl verstanden werden, die der Reihe nach die Werte 1 bis n—1 annimmt. Es gelten also die Gleichungen:

$$(14)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left(\frac{c_k}{r_h e^{i\varphi_h} - R' e^{i\gamma'_k}}\right) = 0$$

für alle Werte von $h = 1$ bis $h = n-1$. Im allgemeinen existieren also $(n-1)$ solche Gleichungen, und jede davon zerfällt wieder in zwei, da immer der reelle und der imaginäre Teil der linken Seite für sich verschwinden muss. Besonders zu beachten sind die Fälle, in denen einige (oder auch alle) der Wurzeln $r_h e^{i\varphi_h}$ einander gleich werden. Es werde angenommen, dass die Wurzel $r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ λ-mal vorkomme; dann werden λ von den Gleichungen (14) identisch und es bleiben im ganzen nur noch $(n-\lambda)$ von einander verschiedene Gleichungen übrig. Nach einem bekannten Satze der Analysis müssen aber in diesem Falle auch die $(\lambda-1)$ ersten Differentialquotienten der linken Seite von Gleichung (13) nach ζ' für den Wert $\zeta' = r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ verschwinden. Es gelten also auch die Gleichungen:

$$(14a)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left[\frac{c_k}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^2}\right] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\left[\frac{c_k}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^3}\right] = 0 \text{ u. s. w. bis}$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\left[\frac{c_k}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^\lambda}\right] = 0.$$

Die Anzahl der Gleichungen (14a) ist $(\lambda-1)$. Man erkennt also, dass im ganzen immer $(n-1)$ Gleichungen von der Form (14) oder (14a) existieren.

Es soll nun die Funktion bestimmt werden, durch welche die Abbildung der ζ'-Ebene auf die ζ''-Ebene in der oben beschriebenen Art vermittelt wird, und zwar zunächst für den Fall, dass auch die ζ''-Ebene nur einblätterig ist. Man beachte, dass nicht angegeben ist, welche Randpunkte einander entprechen sollen; dieselben können also beliebig gewählt werden. Es handelt sich darum, eine einblätterige Ebene ζ' auf einer einblättrigen Ebene ζ'' so abzubilden, dass das Innere eines Kreises vom Radius R' um den Koordinatenanfangspunkt der erstgenannten dem Innern eines Kreises von Radius R'' um den Nullpunkt der letzteren entspricht, und dass speziell einander entsprechen die inneren Punkte $\zeta' = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $\zeta'' = 0$, und die Randpunkte $\zeta' = R'$ und $\zeta'' = R''$.

Ein sehr bekanntes Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe ist zuerst von Möbius angegeben worden und in den meisten Lehrbüchern

beschrieben, die die Theorie der komplexen Grössen behandeln. Es wird aber meistens dort nicht durchgeführt. Es wird daher nicht ganz überflüssig sein, dies hier zu thun.

Nach einem bekannten Satze hat jede lineare Transformation von der Form

$$(15)\quad \zeta = \frac{a + b\,\zeta'}{c + \zeta'},$$

die Eigenschaft, dass durch sie Kreise wieder in Kreise übergeführt werden, wenn a, b und c konstante Werte haben. Für das Fol-

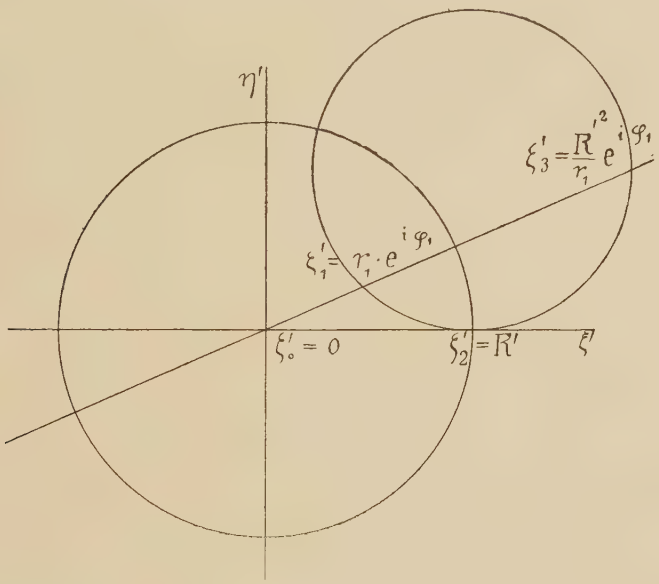

Fig. 1.

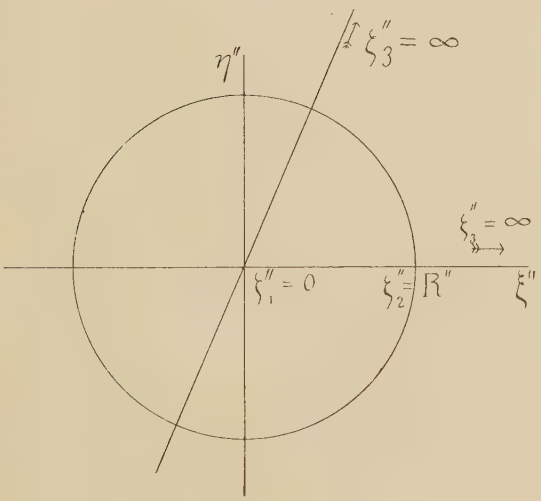

Fig. 2.

gende gelten die Figuren 1 und 2. Man lege in der ζ'-Ebene einen Kreis durch die Punkte $\zeta'_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $\zeta'_2 = R'$ derart, dass der Kreis R′ senkrecht geschnitten wird. Der entsprechende Kreis in der ζ''-Ebene muss nun durch die Punkte $\zeta''_1 = 0$ und $\zeta''_2 = R''$ gehen und den Kreis R″ senkrecht schneiden, also die Gerade $\zeta''_1\,\zeta''_2$ sein. Man ziehe nun noch in der ζ'-Ebene eine Gerade durch die Punkte $\zeta'_0 = 0$ und ζ'_1. Sie schneidet den Hilfskreis in einem Punkte ζ'_3, dessen Koordinate mit Hilfe des Tangentensatzes gleich $\frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1}$ gefunden wird. Der Kreis, der dieser Geraden entspricht, muss durch den Punkt $\zeta''_1 = 0$ gehen den Kreis R″ senkrecht und die Gerade $\zeta''_1\,\zeta''_2$ unter demselben Winkel schneiden, wie die Gerade $\zeta'_0\,\zeta'_1$ den Hilfskreis. Es ergibt sich also ein Durchmesser, aber ein anderer als $\zeta''_1\,\zeta''_2$. Diese zwei Durchmesser des Kreises R″ haben ausser dem Mittelpunkt noch den unendlich fernen Punkt gemeinsam. Dieser entspricht daher dem Punkte ζ'_3.

Wenn man die einander entsprechenden Wertepaare von ζ' und ζ'' in Gleichung (15) einsetzt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(16)\quad 0 = \frac{a + b \cdot r_1 e^{i\varphi_1}}{c + r_1 e^{i\varphi_1}};$$

$$(17)\quad R'' = \frac{a + b \cdot R'}{c + R'} \text{ und}$$

$$(18)\quad \infty = \frac{a + b \cdot \frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1}}{c + R'^2 \frac{e^{i\varphi_1}}{r_1}} \text{ oder } c + \frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können die Konstanten a, b, c berechnet werden. Aus (16) und (18) folgt

$$a = -b \cdot r_1 e^{i\varphi_1} \text{ und } c = -\frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (15) und (17) erhält man

$$\zeta'' = b \frac{\zeta' - r_1 e^{i\varphi_1}}{\zeta' - \frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1}} \text{ und } b = R'' \frac{R' - \frac{R'^2}{r_1} e^{i\varphi_1}}{R' - r_1 e^{i\varphi_1}} \text{ und}$$

hieraus ergibt sich:

$$(19)\quad \zeta'' = R' R'' \frac{r_1 - R' e^{i\varphi_1}}{R' - r_1 e^{i\varphi_1}} \cdot \frac{\zeta' - r_1 e^{i\varphi_1}}{r_1 \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_1}}.$$

Dies ist die Lösung für den speziellen Fall. Die allgemeine Lösung lässt sich jetzt leicht erraten; sie ist:

$$(20)\quad \zeta'' = R'' \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left\{ \frac{R' r_h - R'^2 e^{i\varphi_h}}{R' - r_h e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}}{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}} \right\}.$$

Beweis. Jeder Punkt in der ζ'-Ebene, der auf dem Kreise R' liegt, wird bei der Transformation (20) zu einem Punkte auf dem Kreise R'' in der ζ''-Ebene. Denn der absolute Betrag jedes Faktors in dem Produkte Π hat dann den Wert 1. Den sämtlichen Punkten $\zeta' = r_h e^{i\varphi_h}$ entspricht der Punkt $\zeta'' = 0$ und dem Punkt $\zeta' = R'$ der Punkt $\zeta'' = R''$. Also sind alle Bedingungen erfüllt, denen die Gleichung zwischen ζ' und ζ'' zu genügen hat.

Nach Herrn Voigt ist zu setzen:

$$(21)\quad \zeta'' = \frac{1}{\zeta} \text{ und}$$

$$(22)\quad R'' = \frac{1}{R}. \text{ Daher wird}$$

$$(23)\quad \zeta = R \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left\{ \frac{R' - r_h e^{i\varphi_h}}{R' r_h - R'^2 e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h \zeta' - R'^2 \cdot e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right\}.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung zwischen ζ und ζ'.

3.

Der Wert von ζ kann nun in Gleichung (12) eingesetzt werden. Es wird dann:

$$(24)\quad z = \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ c_k \int \left[\frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \cdot R' \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{R' - r_h e^{i\varphi_h}}{R' r_h - R'^2 e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right) \right] \right\}.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$(25)\quad R \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{R' - r_h e^{i\varphi_h}}{R' r_h - R'^2 e^{i\varphi_h}} \right) = \Pi_0.$$

Das Produkt Π_0 ist in Bezug auf ζ' konstant und darf also vor das Integralzeichen gesetzt werden. Ausserdem enthält es keine Grösse, die den Index k trägt, ist also dasselbe für jeden der durch die Zahl

k charakterisierten Summanden; es darf daher auch vor das Summenzeichen gesetzt werden. Es wird demnach:

$$(26)\quad z = \Pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ c_k \int \left[\frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right) \right] \right\}$$

Das Integral ist algebraisch und rational; der Nenner ist bereits in lineare Faktoren zerlegt; es kann also in allen Fällen auf elementarem Wege ausgewertet werden. Der Uebersichtlichkeit wegen empfiehlt es sich, zunächst jeden Summanden für sich zu behandeln. Wir setzen:

$$(27)\quad z_k = \int \left[\frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right) \right]$$

und demgemäss wird:

$$(28)\quad z = \Pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} (c_k z_k).$$

Durch Differentiieren von Gleichung (27) wird:

$$(29)\quad \frac{d z_k}{d \zeta'} = \frac{1}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right).$$

Das Produkt auf der rechten Seite der letzten Gleichung muss nun in Partialbrüche zerlegt werden. Dabei ist Folgendes zu beachten: Der Faktor $\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}$ ist jedenfalls nur einmal im Nenner vorhanden. Denn in der ζ'-Ebene liegt jeder Punkt $R' e^{i\gamma'_k}$ auf der Peripherie, jeder Punkt $r_h e^{i\varphi_h}$ im Innern des Kreises R'. Es kann daher niemals eines von den $r_h e^{i\varphi_h}$ dem $R' e^{i\gamma'_k}$ gleich werden. Nach der Partialbruchzerlegung wird also die Differenz $\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}$ nur als Nenner eines einzigen Bruches erscheinen und zwar in der ersten Potenz; der zugehörige Zähler ist konstant in Bezug auf ζ'; er werde M_k genannt. Die Beifügung des Index k mag andeuten, dass man im allgemeinen jedes Mal eine andere Konstante als Zähler bekommt, wenn man die Gleichung (29) für ein anderes k aufstellt.

Von den $r_h e^{i\varphi_h}$ hingegen können einige oder auch alle einander gleich werden. Es mag daher angenommen werden, dass z. B. die Differenz $\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ im Nenner des Produktes Π λ-mal als Faktor enthalten sei. Es werden sich dann bei der Zerlegung im allgemeinen λ von diesem Faktor herrührende Partialbrüche ergeben, von denen der erste die Grösse $\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ in der ersten, der zweite in der zweiten, der

ν - te in der ν - ten und der letzte in der λ - ten Potenz als Nenner hat, während die Zähler wieder Konstante sein werden. Diese Konstanten sollen der Reihe nach $M_{k,\,\mu,\,1}, M_{k,\,\mu,\,2}, \ldots M_{k,\,\mu,\,\nu}, \ldots . M_{k,\,\mu,\,\lambda}$ genannt werden. Es wird kaum möglich sein, durch weniger als drei Indices diese Konstanten deutlich zu bezeichnen. Man kann jetzt Gleichung (29) folgendermassen schreiben:

$$(30)\quad \frac{d\,z_k}{d\,\zeta'} = \frac{1}{\zeta' - R'\,e^{i\gamma'_k}} \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h\,\zeta' - R'^2\,e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h\,e^{i\varphi_h}} \right) =$$

$$\frac{M_k}{\zeta' - R'\,e^{i\gamma'_k}} + \frac{M_{k,\,\mu,\,\nu}}{\left(\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}\right)^\nu} + \Sigma_k.$$

Unter dem Zeichen Σ_k sind alle nicht speziell angeführten Glieder zusammengefasst, die auf der rechten Seite auftreten. Dieselben haben jedenfalls dieselbe Form, wie das an zweiter Stelle stehende, nur dass μ und ν andere Zahlen bedeuten. Es handelt sich jetzt darum, die Konstanten zu berechnen.

Um den Wert der Konstanten M_k zu erhalten, multipliziere man beide Seiten der Gleichung (30) mit $\zeta' - R'\,e^{i\gamma'_k}$ und setze dann $\zeta' = R'\,e^{i\gamma'_k}$.

Es wird dann:

$$(31)\quad M_k = \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h\,R'\,e^{i\gamma'_k} - R'^2\,e^{i\varphi_h}}{R'\,e^{i\gamma'_k} - r_h\,e^{i\varphi_h}} \right).$$

Umständlicher wird die Berechnung der Konstanten $M_{k,\,\mu,\,\nu}$. Mit Ausnahme des Bruches $\frac{M_{k,\,\mu,\,\nu}}{\left(\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}\right)^\nu}$ lassen sich sämtliche Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (30) in zwei Gruppen teilen: erstens in solche, die den Faktor $\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}$ in einer höheren Potenz als der ν - ten enthalten, und zweitens in solche, in deren Nenner dieser Faktor in einer niedrigeren Potenz als der ν - ten steht oder die einen anderen Faktor im Nenner haben. Wenn also Gleichung (30) auf der rechten Seite mit $\left(\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}\right)^\lambda$ multipliziert wird, so ist die Konstante $M_{k,\,\mu,\,\nu}$ die einzige, die den Faktor $\left(\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}\right)^{\lambda-\nu}$ bekommt. Es werde nun $(\lambda-\nu)$ - mal differentiiert. Dadurch fallen alle Glieder der ersten Gruppe weg. Das Glied $M_{k,\,\mu,\,\nu} \cdot \left(\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}\right)^{\lambda-\nu}$ reduziert sich auf die Konstante $M_{k,\,\mu,\,\nu}$, wenn man den Faktor $(\lambda-\nu)!$ der Einfachheit wegen zur Konstanten schlägt. Alle übrigen Glieder enthalten nach der Differentiation den Faktor $\zeta' - r_\mu\,e^{i\varphi_\mu}$ mindestens noch einmal; sie verschwinden also, wenn

für ζ' der Wert $r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ gesetzt wird. Nach der Ausführung der drei genannten Rechenoperationen bleibt daher auf der rechten Seite von Gleichung (30) nur die Konstante $M_{k,\,\mu,\,\nu}$. Man erhält demnach den Wert derselben, wenn man auf dieselbe Art mit der linken Seite verfährt.

Durch die Multiplikation erhält man zunächst:

$$\frac{1}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right) \cdot \left(\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu} \right)^\lambda.$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(32) \quad \left(\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu} \right)^\lambda \cdot \prod_{h=1}^{h=n-1} \left(\frac{r_h \zeta' - R'^2 e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h e^{i\varphi_h}} \right) = \Pi(\zeta').$$

Die Funktion $\Pi(\zeta')$ enthält den Faktor $\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ weder im Zähler noch im Nenner. Sie wird also für den Wert $\zeta' = r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ weder unendlich klein noch unendlich gross. Sie enthält auch keine Grösse, die mit dem Index k versehen ist. Dieselben Eigenschaften haben auch sämtliche Differentialquotienten von $\Pi(\zeta')$.

Die Grösse, welche $(\lambda - \nu)$ mal differentiiert werden muss, hat folgende einfache Form:

$$\frac{\Pi(\zeta')}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}}.$$

Durch die Differentiation erhält man eine Summe von Brüchen, in deren Nenner der Reihe nach die erste, zweite bis $(\lambda - \nu + 1)$ te Potenz von $\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}$ steht. Die Zähler setzen sich aus $\Pi(\zeta')$ und den $(\lambda - \nu)$ ersten Differenzialquotienten dieser Funktion linear zusammen. Für $\zeta' = r_\mu e^{i\varphi_\mu}$ erhalten sie endliche bestimmte Werte, welche $M_{\mu,\,1}$, $M_{\mu,\,2}$ u. s. w. bis $M_{\mu,\,\lambda-\nu+1}$ genannt werden mögen. Der Wert der Konstanten $M_{k,\,\mu,\,\nu}$ lässt sich jetzt folgendermassen schreiben:

$$M_{k,\,\mu,\,\nu} = \frac{M_{\mu,\,1}}{r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}} + \frac{M_{\mu,\,2}}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k} \right)^2} + \ldots .$$

$$(33) \quad + \frac{M_{\mu,\,\lambda-\nu+1}}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k} \right)^{\lambda-\nu+1}}.$$

Dieser Wert möge nun in Gleichung (30) eingesetzt und zugleich die Integration wenigstens symbolisch ausgeführt werden. Man erhält

$$z_k = M_k \int \frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} + M_{\mu,1} \cdot J \cdot \frac{1}{r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}} +$$

$$M_{\mu,2} \cdot J \cdot \frac{1}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^2} + \ldots$$

$$(34) \qquad + M_{\mu,\lambda-\nu+1} \cdot J \cdot \frac{1}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^{\lambda-\nu+1}} +$$

$$\int \Sigma_k \cdot d\zeta'.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$(35) \qquad \int \frac{d\zeta'}{\left(\zeta' - r_\mu e^{i\varphi_\mu}\right)^\nu} = J$$

gesetzt. Wenn man den Wert von z_k in Gleichung (28) substituiert und mit allen Faktoren, welche für sämtliche k gleich sind, vor das Summenzeichen geht, so erhält man:

$$z = \Pi_0 \sum_{k=1}^{k=2n} \left(c_k M_k \int \frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \right) +$$

$$\Pi_0 \cdot M_{\mu,1} \cdot J \sum_{k=1}^{k=2n} \left(\frac{c_k}{r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}} \right)$$

$$+ \Pi_0 \cdot M_{\mu,2} \cdot J \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left(\frac{c_k}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^2} \right)$$

$$+ \ldots + \Pi_0 \cdot M_{\mu,\lambda-\nu+1} \cdot J \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left(\frac{c_k}{\left(r_\mu e^{i\varphi_\mu} - R' e^{i\gamma'_k}\right)^{\lambda-\nu+1}} \right) +$$

$$(36) \qquad \Pi_0 \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left(c_k \int \Sigma_k \, d\zeta' \right).$$

Aus den Gleichungen (14) und (14a) erkennt man zunächst, dass mit Ausnahme des an erster und des an der letzten Stelle aufgeführten sämtliche Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (36) verschwinden. Dasselbe gilt aber auch für das letzte Glied. Denn unter dem Zeichen Σ_k sind nur Glieder mit genau denselben Eigenschaften zusammengefasst, wie sie das Glied besitzt, von dem gezeigt wurde, dass es zum Werte von z nichts beiträgt. (Vgl. S. 13). Es ergibt sich also die einfache Beziehung

$$(37)\quad z = \Pi_0 \sum_{k=1}^{k=2n} \left(c_k M_k \int \frac{d\zeta'}{\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}} \right).$$

Das Produkt $\Pi_0\ c_k\ M_k$ bedeutet eine komplexe Konstante, die im allgemeinen für jeden Summanden eine andere ist. Da wir, soweit es möglich ist, nur mit reellen Grössen rechnen wollen, so setzen wir:

$$(38)\quad \Pi_0 \cdot c_k \cdot M_k = C'_k e^{i\gamma_k}.$$

Die Integration von Gleichung (37) lässt sich sofort ausführen. Die auftretende, im allgemeinen komplexe, Konstante möge mit z_0 bezeichnet werden. Es ergibt sich:

$$(39)\quad z = z_0 + \sum_{k=1}^{k=2n} \left(C'_k e^{i\gamma_k} \lg\left(\zeta' - R' e^{i\gamma'_k}\right) \right).$$

4.

Durch die bisher angestellten Rechnungen ist der Hauptteil der Aufgabe bereits erledigt. Denn durch die Gleichung (39) ist der Ort jedes Flüssigkeitselementes und durch Gleichung (23) seine Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung als Funktion desselben Parameters, ζ', dargestellt und durch Elimination von ζ' aus den Gleichungen (10) und (39) könnte man die Gleichnngen der Stromkurven und der Kurven gleichen Geschwindigkeitspotentials finden. Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Grenzbedingungen aufzusuchen und die Konstanten, soweit es möglich ist, zu bestimmen. Man muss zunächst sich darüber klar werden, welche Konstanten im allgemeinen werden als bekannt betrachtet werden dürfen. Man nehme an, dass nur ein einziger Strahl vorhanden sei. Zur vollständigen Beschreibung dieses Falles der Bewegung ist nötig die Kenntnis

1. der Richtung,
2. der Geschwindigkeit der Strömung irgend eines Punktes der Flüssigkeit;
3. und 4. des Abstandes der beiden Grenzen des Strahles vom Koordinatenanfangspunkt.

Statt der beiden letztgenannten Konstanten können auch ihre Differenz, die die Breite des Strahles darstellt, und ihre halbe Summe eingeführt werden; letztere kann als Abstand des mittleren Stromfadens bezeichnet werden.

Dabei ist angenommen worden, dass das Koordinatensystem unabhängig von jenem Strahl irgendwie festgelegt ist.

Wenn irgendwo im Endlichen der betrachtete Strahl mit anderen zusammenstösst, so bleibt trotzdem an jener unendlich fernen Stelle,

von der der Strahl herkommt, die Bewegung dieselbe; dort behalten also die erwähnten Konstanten ihre Bedeutung bei. Die Richtung vom Koordinatenanfangspunkt nach jener unendlich fernen Stelle ist der Richtung der Strömung im Unendlichen entgegengesetzt.

Was für diesen einen Strahl gilt, gilt für alle Strahlen. Wir wollen daher die genannten Grössen für jene unendlich fernen Stellen, von denen Strahlen herkommen, als gegeben ansehen. Es handelt sich dann darum, diese Konstanten durch bereits in die Rechnung eingeführte auszudrücken. Das wird sich durch einige Umformungen der Gleichung (39) ausführen lassen.

5.

Aus Gleichung (39) erkennt man, dass z unendlich gross wird, wenn für ζ' einer der Werte $R' e^{i\gamma'_k}$ gesetzt wird, sagen wir, der Wert $R' e^{i\gamma'_\mu}$. Die Richtung vom Koordinatenanfangspunkt nach jenem unendlich grossen Werte von z ist γ_μ oder $\gamma_\mu + \pi$. Es wird dies noch deutlicher werden, wenn statt des komplexen Koordinatensystems ein rechtwinkliges, um den Winkel γ_μ gegen das erstgenannte verdrehtes eingeführt wird. Die neuen Koordinaten mögen x_μ und y_μ genannt werden, und die Axe x_μ möge mit der reellen z-Axe den Winkel γ_μ einschliessen; derselbe Winkel wird dann zwischen der y_μ- und der imaginären z-Axe auftreten. Es wird dann x_μ gleich dem reellen, y_μ gleich dem imaginären Teil des Ausdruckes

$$(40)\quad z_\mu = z_0 \cdot e^{-i\gamma_\mu} + \sum_{k=1}^{k=2n} \left[C'_k e^{i(\gamma_k - \gamma_\mu)} \lg \left(\zeta' - R' e^{i\gamma'_k} \right) \right].$$

Es sei $\zeta' = \rho' e^{i\vartheta'}$; dann wird

$$\zeta' - R' e^{i\gamma'_k} = (\rho' \cos \vartheta' - R' \cos \gamma'_k) + i (\rho' \sin \vartheta' - R' \sin \gamma'_k) \text{ und}$$

$$\lg \left(\zeta' - R' e^{i\gamma'_k} \right) = \frac{1}{2} \lg \left[\rho'^2 + R'^2 - 2 R' \rho' \cos (\vartheta' - \gamma'_k) \right] + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho' \sin \vartheta' - R' \sin \gamma'_k}{\rho' \cos \vartheta' - R' \cos \gamma'_k} \right).$$

Setzt man noch $z_0 = x_0 + i y_0$, so erhält man:

$$(41)\quad x_\mu = x_0 \cos \gamma_\mu + y_0 \sin \gamma_\mu +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k\cos(\gamma_k-\gamma_\mu)\,.\,\lg\left[\rho'^2+R'^2-2R'\rho'\cos(\vartheta'-\gamma'_k)\right]\right\}$$
$$-\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k\sin(\gamma_k-\gamma_\mu)\,.\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho'\sin\vartheta'-R'\sin\gamma'_k}{\rho'\cos\vartheta'-R'\cos\gamma'_k}\right)\right\}.$$

Punkten der Flüssigkeitsgrenze entsprechen in der ζ'-Ebene Punkte auf der Peripherie des Kreises R'. Umgekehrt erhält man daher auch Punkte auf der Grenze der Flüssigkeit, wenn man für ρ' den Wert R' wählt. Es wurde ausserdem für ϑ' der Wert γ'_μ gesetzt. Man erkennt dann, dass in Gleichung (41) alle Glieder bis auf zwei von endlicher Grösse sein werden. Die Ausnahmen bilden die Summanden, die man erhält, wenn man für den Index k den Wert μ nimmt. Diese Glieder erhalten die Form:

$$+\frac{1}{2}C'_\mu\,.\,\lg 0 \text{ und } -C'_\mu\sin 0\,.\,\text{arctg.}\,\frac{0}{0}.$$

Die Unbestimmtheit der Grösse unter dem arctg hindert nicht, dass das zweite verschwindet. Das erste wird unendlich gross und bekommt dabei ein anderes Vorzeichen wie C'_μ. Das Ergebnis dieser Betrachtungen fässt sich vorläufig folgendermassen zusammenfassen:

Dem Punkte $\zeta' = R'e^{i\gamma'_\mu}$ entspricht ein Punkt der Flüssigkeit, dessen x_μ-Koordinate unendlich gross ist; das Vorzeichen derselben ist verschieden von dem von C'_μ.

Die Produkte $C'_k e^{i\gamma_k}$ waren (S. 16) für komplexe Konstante eingeführt worden; dort wurde festgesetzt, dass die Grössen C'_k und γ'_k reell sein sollen, die Vorzeichen der C' wurden aber vorläufig unbestimmt gelassen. Es soll jetzt angenommen werden, dass durch entsprechende Wahl der Winkel γ_k immer positive C'_k erhalten werden, wenn k eine ungerade, und negative C'_k, wenn k eine gerade Zahl ist. Diese Annahmen sind an sich willkürlich, sie werden aber nachträglich durch die einfache Bedeutung, die den so definierten Winkeln γ zukommt, und durch die Uebereinstimmung der Formeln, die wir erhalten werden, mit den von Herrn Voigt abgeleiteten Formeln gerechtfertigt werden. Die ausgezeichneten Werte von x_μ werden dann positiv unendlich gross, wenn die zugehörige Zahl k gerade, und negativ unlich gross, wenn sie ungerade ist.

Die Berechnung der Koordinate y_μ jenes Punktes, der dem Punkte $\zeta' = R'e^{i\gamma'_\mu}$ entspricht, lässt sich am einfachsten nach einem bereits von Voigt angegebenen Verfahren ausführen, durch welches die Schwierigkeit umgangen wird, die die Auswertung des Ausdrucks unter

dem arctg verursacht. Gleichung (40) kann man in der folgenden Form schreiben:

$$(40a)\; z_\mu = z_0 \cdot e^{-i\gamma_\mu} + \lg \zeta' \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ C'_k \, e^{i(\gamma_k - \gamma_\mu)} \right\} + \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ C'_k \, e^{i(\gamma_k - \gamma_\mu)} \cdot \lg \left[1 - \frac{R' \, e^{i\gamma'_k}}{\zeta'} \right] \right\}.$$

Der imaginäre Teil des Ausdrucks auf der rechten Seite ist y_μ. Das erste Glied liefert dazu den Beitrag

$$- x_0 \sin \gamma_\mu + y_0 \cos \gamma_\mu. \quad \text{Ferner ist}$$

$$\lg \zeta' = \lg \left(\rho' \, e^{i\vartheta'} \right) = i\,\vartheta' + \lg \rho'.$$

Demnach wird der imaginäre Teil des zweiten Gliedes

$$= \vartheta' \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ C'_k \cos (\gamma_k - \gamma_\mu) \right\} + \lg \rho' \cdot \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ C'_k \sin (\gamma_k - \gamma_\mu) \right\}.$$

Beim dritten Gliede auf der rechten Seite von Gleichung (40a) kann man den reellen und den imaginären Teil nicht so leicht trennen. Wir wollen daher zunächst die Trennung nur für den Faktor $\lg \left(1 - \frac{R' \, e^{i\gamma'_k}}{\zeta'} \right)$ vornehmen und uns die Sache noch dadurch vereinfachen, dass wir für ζ' sogleich den Wert $R' \, e^{i\vartheta'}$ setzen. Es ist:

$$\lg \left[1 - e^{i(\gamma'_k - \vartheta')} \right] = \lg \left[1 - \cos (\gamma'_k - \vartheta') - i \sin (\gamma'_k - \vartheta') \right].$$

Der reelle Teil dieses Ausdruckes ist daher

$$= \frac{1}{2} \lg \left\{ \left[1 - \cos (\gamma'_k - \vartheta') \right]^2 + \sin^2 (\gamma'_k - \vartheta') \right\} =$$

$$\frac{1}{2} \lg \left\{ 2 - 2 \cos (\gamma'_k - \vartheta') \right\} = \frac{1}{2} \lg \left\{ 4 \sin^2 (\gamma'_k - \vartheta') \right\}.$$

Zur Berechnung des imaginären Teiles benützen wir die bekannte Identität

$$\lg (1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots .$$

Für x ist zu setzen $e^{i(\gamma'_k - \vartheta')}$; man erhält

$$\lg \left[1 - e^{i(\gamma'_k - \vartheta')} \right] = - e^{i(\gamma'_k - \vartheta')} - \frac{1}{2} e^{2i(\gamma'_k - \vartheta')} - \frac{1}{3} e^{3i(\gamma'_k - \vartheta')} - \ldots$$

Der imaginäre Teil lässt sich jetzt sofort angeben; er ist

$$= -\sin(\gamma'_k - \vartheta') - \frac{1}{2}\sin 2(\gamma'_k - \vartheta') - \frac{1}{3}\sin 3(\gamma'_k - \vartheta') - \ldots$$

Diese Reihe kann man mit Hilfe der auch von Herrn Voigt benützten Formel summieren:

$$\sum_{h}^{h}{}_{1}^{\infty}\left|\frac{\sin h\chi}{h}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \chi) \text{ für } 0 < \chi < 2\pi; \\ -\frac{1}{2}(\pi + \chi) \text{ für } 0 > \chi > -2\pi. \end{cases}$$

Nach den Ungleichungen (8) liegen die sämtlichen Wiukel γ' zwischen 0 und 2π. Da der Winkel ϑ' nur dasselbe Intervall durchlaufen soll, so liegt die Differenz $(\gamma'_k - \vartheta')$ immer zwischen $+2\pi$ und -2π. Die Reihe erhält also den Wert

$$+\frac{1}{2}\left[\pi \mp (\gamma'_k - \vartheta')\right],$$

und zwar gelten hier wie auch im Folgenden immer die oberen Vorzeichen, wenn $0 < \gamma'_k - \vartheta' < 2\pi$, und die unteren Vorzeichen, wenn $0 > \gamma'_k - \vartheta' > -2\pi$ ist.

In gleicher Weise gilt

$$\lg\left[1 - e^{i(\gamma'_k - \vartheta')}\right] = \frac{1}{2}\lg\left[4\sin^2(\gamma'_k - \vartheta')\right] \mp \frac{i}{2}\left[\pi \mp (\gamma'_k - \vartheta')\right].$$

Jetzt kann man den imaginären Teil des dritten Gliedes auf der rechten Seite von Gleichung (40a) leicht angeben; er ist

$$\mp\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot\left[\pi \mp (\gamma'_k - \vartheta')\right]\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \sin(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot\lg\left[4\sin^2(\gamma'_k - \vartheta')\right]\right\}.$$

Einem jeden Punkte $\zeta' = R' e^{i\vartheta'}$ entspricht daher ein Punkt auf der Grenze der Flüssigkeit, dessen y_μ-Koordinate folgenden Wert hat:

$$\bar{y}_\mu = y_0 \cos\gamma_\mu - x_0 \sin\gamma_\mu + \vartheta' \cdot \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\right\} +$$

$$\lg R' \cdot \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \sin(\gamma_k - \vartheta')\right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot\right.$$

$$\left[\pi \mp (\gamma'_k - \vartheta')\right]\Big\{ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\Big\{ C'_k \sin(\gamma_k - \gamma_\mu) \cdot \lg\left[4\sin^2(\gamma'_k - \vartheta')\right]\Big\}.$$

Durch Zusammenziehen einiger Glieder erhält man hieraus:

$$\bar{y}_\mu = y_0 \cos\gamma_\mu - x_0 \sin\gamma_\mu \mp \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\Big\{ C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu) \cdot \left[\pi \mp (\gamma'_k + \vartheta')\right]$$

$$(42) \quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\Big\{ C'_k \sin(\gamma_k - \gamma_\mu) \cdot \lg\left[4\,R'^2 \sin^2(\gamma'_k - \vartheta')\right]\Big\}.$$

Durch Gleichung (42) ist der Wert von $\bar{y}_\mu$ im allgemeinen eindeutig bestimmt. Aber gerade in dem besonders wichtigen Falle, dass ϑ' einem der γ', etwa dem γ'_μ gleich wird, erhält die Formel etwas Unbestimmtes. weil die oben angegebene Regel für die Vorzeichen keine Entscheidung mehr gibt. So lange ϑ' auch nur unendlich wenig kleiner oder grösser ist als γ'_μ, gilt für jedes Glied ein bestimmtes Zeichen, und man erhält zwei verschiedene Grenzwerte. Beide werden endlich. Sie sollen resp. y'_μ und y''_μ genannt werden.

Das Ergebnis der bisherigen Rechnungen dieses Abschnittes ist Folgendes. Dem Punkte $\zeta' = R' e^{i\gamma'_\mu}$ entsprechen zwei Punkte der, Flüssigkeitsgrenze, deren x_μ-Koordinate positiv unendlich gross ist wenn der Index μ eine gerade, und negativ unendlich gross, wenn μ eine ungerade Zahl ist, und deren y_μ-Koordinaten jedenfalls endlich sind. Wenn man sich erinnert, wie das Koordinatensystem der x_μ, y_μ definiert wurde, so kann man das auch so ausdrücken: Wenn μ eine gerade Zahl ist, so erstreckt sich das Gebiet der Flüssigkeit bis ins Unendliche in einer Richtung, welche mit der reellen z-Achse den Winkel γ_μ einschliesst. Wenn μ eine ungerade Zahl ist, so erstreckt sich das Gebiet der Flüssigkeit bis ins Unendliche in einer Richtung, welche mit der reellen z-Achse den Winkel $\gamma_\mu + \pi$ einschliesst. Da $2n$ Winkel γ_μ existieren, so erstreckt sich das Gebiet der Flüssigkeit $2n$-mal bis ins Unendliche. Dies war schon bekannt, bevor die Rechnung angestellt wurde; denn es sind zusammen gerade $2n$ aus dem Unendlichen kommende oder ins Unendliche verschwindende Strahlen vorhanden. Die Richtungen vom Koordinatenanfangspunkt nach jenen unendlich fernen Stellen, von denen Strahlen herkommen, oder wohin welche fliessen, sind also durch die Winkel γ vollständig bestimmt. Die Strahlen werden im Unendlichen von je zwei Linien begrenzt, die mit diesen Richtungen parallel sind. Die Abstände dieser Linien vom Koordinatenanfangspunkt müssen daher senkrecht zu diesen Richtungen

gemessen werden und sind also offenbar gleich y'_μ bez. y''_μ. Die Breite des Strahles μ möge C_μ genannt werden; dabei sollen die C stets positive Grössen sein. Die Strahlenbreite muss gleich der Differenz zwischen y'_μ und y''_μ sein. Wenn man dieselbe ausrechnet, so erhält man für gerade μ

$$C_\mu = \overline{y}'_\mu - \overline{y}''_\mu = -\pi \cdot C'_\mu \text{ und für ungerade } \mu$$

$$C_\mu = \overline{y}''_\mu - \overline{y}'_\mu = \pi \cdot C'_\mu. \text{ Allgemein gilt also:}$$

(43) $C_k = (-1)^{(k-1)} \pi \cdot C'_k$ und (44) $C'_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi} C_k$.

Der Abstand des mittleren Stromfadens in dem unendlich fernen Teile des Strahles μ vom Koordinatenanfangspunkt möge d_μ genannt werden; er ist gleich dem arithmetischen Mittel aus $\overline{y}'_\mu$ und $\overline{y}''_\mu$; also ist:

$$(45)\quad d_\mu = y_0 \cos\gamma_\mu - x_0 \sin\gamma_\mu -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\mu-1}\left\{C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot\left[\pi - (\gamma'_k + \gamma'_\mu)\right]\right\} + C'_\mu \gamma'_\mu +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=\mu+1}^{k=2n}\left\{C'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot\left[\pi + \gamma'_k + \gamma'_\mu\right]\right\} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{C'_k \sin(\gamma_k - \gamma_\mu)\cdot \lg\left[4\,R'^2 \sin^2(\gamma'_k - \gamma'_\mu)\right]\right\}.$$

6.

Die folgenden Betrachtungen sollen zur Aufstellung einer Reihe von weiteren Gleichungen zwischen den Konstanten dienen.

Wenn $\zeta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ gesetzt wird, so ist ρ der reciproke Wert der Grösse der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes, welches sich an der zu jenem ζ gehörigen Stelle z befindet, und ϑ ist der Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der reellen Koordinatenaxe einschliesst. Diese Eigenschaft von ζ kann zur Ermittlung einiger einander entsprechenden Werte von ζ und ζ' benützt werden.

Es sei $\zeta' = R' e^{i\gamma'_k}$; dann liegt das zugehörige z im Unendlichen. Dort ist die Grösse der Geschwindigkeit konstant und gleich $G = \frac{1}{R}$. Dies

ist eine der Voraussetzungen, von denen Herr Voigt bei der allgemeinen Behandlung des Problems ausgeht. Es soll nun bewiesen werden, dass die Richtung der Geschwindigkeit an dieser Stelle mit der reellen z-Axe den Winkel γ_k einschliesst.

Man beachte zunächst, dass die Winkel γ der Grösse nach aufeinander folgen wie ihre Indices. Dies kann man sich auf folgende Art klar machen. Für die Winkel γ' ist angenommen worden, dass sie durch ihre Indices der Grösse nach geordnet seien (vgl. Ungleichung 8). In derselben Weise folgen also die Punkte $R' e^{i\gamma'}$ auf der Peripherie des Kreises R' in der ζ'-Ebene aufeinander. Zwei aufeinander folgenden Punkten $R' e^{i\gamma'}$ entsprechen zwei unendlich ferne Stellen des Flüssigkeitsgebietes, während den dazwischen liegenden Teilen der Peripherie Teile der Flüssigkeitsgrenze entsprechen, welche durchaus im Endlichen verlaufen. Würden nun die Winkel γ nicht wie ihre Indices aufeinander folgen, so müsste die Flüssigkeitsgrenze sich selbst schneiden. Es müsste also Stellen der z-Ebene geben, die von der Flüssigkeit mehrfach überdeckt würden, und dies schliesst eine physikalische Unmöglichkeit in sich.

Zwischen zwei kommenden Strahlen muss immer ein gehender liegen und umgekehrt. Wir wollen daher annehmen, dass die Strahlen mit ungeradem Index aus dem Unendlichen kommen, und dass die Strahlen mit geradem Index ins Unendliche verschwinden; die umgekehrte Annahme wäre ebenfalls zulässig gewesen. Jetzt kann man leicht erkennen, dass die Richtung der Geschwindigkeit in dem unendlich fernen Teile des Strahles k gleich γ_k sein muss. Denn die Richtung der Bewegung muss nach dem Koordinatenanfangspunkt hin oder von ihm weg gerichtet sein. Sonst könnte nämlich das betr. Flüssigkeitsteilchen nicht bis auf endliche Entfernung an diesen Punkt herankommen, bez. aus endlicher Entfernung nach jenen unendlich fernen Stellen gelangen. Das erstere gilt für Strahlen mit ungerader, das letztere für Strahlen mit gerader Nummer. Nun sind die Winkel γ_k gerade so eingeführt worden, dass sie für einen geraden Index k die Richtung nach dem unendlich fernen Punkte des Strahles k und für einen ungeraden Index die entgegengesetzte Richtung angeben. Also sind die Winkel γ_k unmittelbar die Richtungen der Bewegung in den Strahlen k.

Aus diesen Auseinandersetzungen zieht man den Schluss, dass die Werte $\zeta' = R' e^{i\gamma'_k}$ und $\zeta = R e^{i\gamma_k}$ einander entsprechen. Wenn man diese Werte in Gleichung (23) einsetzt, so erhält man die 2n Gleichungen:

$$(46)\quad e^{i\gamma_k} = \prod_{h=1}^{h=n-1} \left\{ \frac{R' - r_h e^{i\varphi_h}}{r_h - R' e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h e^{i\gamma'_k} - R' e^{i\varphi_h}}{R' e^{i\gamma'_k} - r_h e^{i\varphi_h}} \right\}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man auch eine sehr einfache Beziehung zwischen den C und c ableiten. Es ist nach Gleichung (38)

$$C'_k \, e^{i\gamma_k} = \Pi_0 \, . \, c_k \, . \, M_k.$$

Den Wert von C'_k findet man in Gleichung (44), den von Π_0 in (25) und den von M_k in (31). Durch Einsetzen erhält man:

$$\frac{(c-1)^{k-1} C_k}{\pi} \cdot e^{i\gamma_k} = c_k \, . \, R \, . \prod_{h=1}^{h=n-1} \left\{ \frac{R' - r_h \, e^{i\varphi_h}}{r_h - R' \, e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h \, e^{i\gamma'_k} - R' \, e^{i\varphi_h}}{R' \, e^{i\gamma'_k} - r_h \, e^{i\varphi_h}} \right\}.$$

Durch Benutzung von (46) ergibt sich sofort:

$$(-1)^{k-1} \, . \, \frac{C_k}{\pi} = c_k \, . \, R \text{ oder}$$

$$(47) \quad c_k = (-1)^{k-1} \frac{C_k}{\pi \, . \, R}.$$

Nach Gleichung (9) ist $\sum_{k=1}^{k=2n} (c_k) = 0$. Daher ist auch

$$(48) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \right\} = 0 \text{ oder}$$

$$C_1 + C_3 + C_5 + \ldots + C_{2n-1} = C_2 + C_4 + C_6 + \ldots + C_{2n},$$

d. h. es fliesst ebenso viel Flüssigkeit ab wie zu, wie es sein muss. Aus (47) erkennt man auch, dass die c jene Vorzeichen erhalten, die ihnen nach der Bemerkung auf Seite 6 zukommen.

Bei der Abbildung der Ebene Ω auf das Gebiet der ζ′ kann man einen beliebigen Punkt im Innern des Kreises R′ einem beliebigen Punkte Ω entsprechen lassen. Von den r_h, φ_h ist daher ein zusammengehöriges Paar beliebig wählbar. Wir setzen $r_1 = 0$; φ_1 fällt dann von selbst fort. Wenn man für diese Werte Gleichung (14) bildet, so erhält man:

$$(49) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (c_k \cos \gamma'_k) = 0 \text{ und } (50) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (c_k \sin \gamma'_k) = 0; \text{ unter Benützung von (47) erhält man hieraus:}$$

$$(51) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \cos \gamma'_k \right\} = 0 \text{ und } (52) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \sin \gamma'_k \right\} = 0.$$

Der Radius R′ ist beliebig; es sei $R' = 1$. Wenn die Geschwindigkeit im Unendlichen der Grösse nach gleich G ist, so ist $R = \frac{1}{G}$.

Ueber den Koordinatenanfangspunkt in der Ebene Ω ist noch nichts festgesetzt. Wir wollen verlangen, dass jener Verzweigungspunkt, dem der Punkt $\zeta' = 0$ entspricht, Koordinatenanfangspunkt wird; d. h. wenn $\zeta' = 0$, so soll auch $\Omega = 0$ werden. Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (10) ergibt sich dafür folgende Bedingung:

$$(53)\quad \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ c_k \, \gamma'_k \right\} + 2\,a_1 = 0.$$

7.

Wenn man das im vorigen Abschnitt Erörterte benützt, so kann man die abgeleiteten Gleichungen in etwas vereinfachter Gestalt schreiben. Dies wird erreicht durch Elimination der Grössen c_k und C'_k, ferner durch die Einführung der speziellen Werte G, 1 und 0 für R, R′ resp. r_1. Diese Substitutionen sind so einfach, dass es wohl genügt, nur das Resultat anzugeben. Mit Rücksicht auf später zu behandelnde spezielle Beispiele ordnen wir die Glieder in Gleichung (45) anders als bisher an. Wir numerieren die Gleichungen doppelt, einmal mit jenen arabischen Ziffern, unter denen sie bisher in etwas komplizierterer Gestalt erhalten worden sind, ausserdem mit römischen Ziffern. Gleichungen, die sich von anderen nur dadurch unterscheiden, dass gewisse Grössen einen anderen Index bekommen, sollen durch Anhängung des betr. Index an die römische Ziffer näher bezeichnet werden. Wir geben jetzt die Zusammenstellung:

$$\text{I. (10)}\quad \Omega = \frac{G}{\pi} \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^{k-1} \cdot C_k \cdot \lg\left(1 - \zeta' \cdot e^{-i\gamma'_k}\right) \right\}.$$

$$\text{II. (23)}\quad \zeta = \frac{1}{G \cdot \zeta'} \prod_{h=2}^{h=n-1} \left\{ \frac{1 - r_h \cdot e^{i\varphi_h}}{r_h - e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h \cdot \zeta' - e^{i\varphi_h}}{\zeta' - r_h\, e^{i\varphi_h}} \right\}.$$

$$\text{III. (39)}\quad z = x_0 + i\,y_0 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \, e^{i\gamma_k} \lg\left(\zeta' - e^{i\gamma'_k}\right) \right\}.$$

$$\text{IV}_\mu\ (45)\quad d_\mu = y_0 \cos\gamma_\mu - x_0 \sin\gamma_\mu - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \sin(\gamma_k - \gamma_\mu) \right.$$

$$\left. \cdot \lg\left[4 \sin^2(\gamma'_k - \gamma'_\mu)\right] \right\} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \, \gamma'_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu) \right\}$$

$$- \frac{\gamma'_\mu}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu) \right\} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\mu-1}\left\{(-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{k=\mu+1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_\mu)\right\}.$$

Diese Gleichung gilt für sämtliche Ziffern μ zwischen $\mu = 1$ bis $\mu = 2n$.

$$V_k\ (46)\quad e^{i\gamma_k} = \frac{1}{e^{i\gamma'_k}} \cdot \prod_{h=2}^{h=n-1}\left\{\frac{1 - r_h \cdot e^{i\varphi_h}}{r_h - e^{i\varphi_h}} \cdot \frac{r_h \cdot e^{i\gamma'_k} - e^{i\varphi_h}}{e^{i\gamma'_k} - r_h \cdot e^{i\varphi_h}}\right\}$$

für $k = 1$ bis $k = 2n$.

$$VI_h \text{ und } VII_h\ (14)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}{}'\left\{\frac{(-1)^k C_k}{e^{i\gamma'_k} - r_h \cdot e^{i\varphi_h}}\right\} = 0$$

für $h = 1$ bis $h = n - 1$. Werden λ von den $r_h e^{i\varphi_h}$ einander gleich, so treten Gleichungen von folgender Form hinzu:

$$VI_h^a \text{ und } VII_h^a\ (14a)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{\frac{(-1)^k C_k}{\left[r_\mu e^{i\varphi_\mu} - e^{i\gamma'_k}\right]^\nu}\right\}$$

für $\nu = 2$ bis $\nu = \lambda$.

$$VIII\ (48)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k\right\} = 0.$$

$$IX\ (53)\quad G\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \gamma'_k\right\} - 2a_1\pi = 0.$$

In den Gleichungen (14) bez. (14a) muss die Summe der reellen und der imaginären Glieder für sich verschwinden; man erhält daher $2(n-1)$ Gleichungen, die VI_h und VII_h, bez. VI_h^a und VII_h^a genannt wurden. Für die Gleichungen (46) gilt zwar derselbe Satz; da aber der absolute Wert der komplexen Grössen auf beiden Seiten von vorneherein gleich ist, so erhält man trotzdem nur $2n$ und nicht $4n$ Gleichungen aus (46).

Die Gleichungen I, II und III liefern die Variabeln Ω, ζ und z als Funktionen des Parameters ζ'. Die übrigen enthalten blos Konstante, und können zur Bestimmung der Werte derjenigen Konstanten dienen, die nicht unmittelbar gegeben sind. Es sind im Ganzen $6n$ solche Gleichungen vorhanden. Als gegeben sind die Konstanten zu betrachten, die sich auf kommende Strahlen beziehen, die also einen ungeraden Index k oder μ tragen, und die Geschwindigkeit G im Unendlichen. Es bleiben dann noch zu ermitteln n von den C_k, n von den γ_k, n von

den d_μ, ferner die $2n$ γ'_k, $(n-2)$ von den r_h, $(n-2)$ von den φ_h, x_0, y_0 und a_1, im Ganzen $(7n-1)$ Konstante. Da dieselben nur $6n$ Bedingungsgleichungen genügen müssen, so darf man noch $(n-1)$ Bedingungsgleichungen willkürlich hinzufügen, also z. B. $(n-1)$ der genannten Konstanten beliebig annehmen. Die Willkürlichkeit ist nur dadurch beschränkt, dass sämtliche Konstante reell werden müssen, dass die C_k positiv, die r_h positiv und kleiner als 1 sein, und dass die γ'_k und φ_h zwischen 0 und 2π, und die γ_k zwischen 0 und $-(n-1)\,2\pi$ liegen müssen. Ausserdem müssen die γ'_k, der Grösse nach geordnet, dieselbe, die γ_k die umgekehrte Reihenfolge geben wie ihre Indices. Wenn also mehrere Systeme von zusammengehörigen Werten der Konstanten den Bedingungsgleichungen genügen, so sind nur diejenigen brauchbar, die die genannten Eigenschaften haben.

8.

Wenn man die im vorigen Abschnitt angegebenen Formeln auf die speziellen Fälle anwendet, die Herr Voigt behandelt hat, so müssen sich selbstverständlich die von ihm gefundenen Beziehungen ergeben. Dass dies wirklich der Fall ist, soll im Folgenden nachgewiesen werden. Es soll zuerst angenommen werden, dass n Strahlen sich so treffen, dass sämtliche Stosszentren zusammenfallen, d. h. dass $r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = r_1 = 0$ ist. Von den Konstanten, die wir im allgemeinen Fall als unbekannt ansehen mussten, sind hiedurch (n—2) bekannt geworden. Da zugleich die Winkel φ_2, φ_3 u. s. f. bis φ_{n-1} aus der Rechnung herausfallen, so hat man nicht mehr (7n—1) Konstante, wie im allgemeinen Fall, sondern nur mehr $5n+3$ Konstante zu ermitteln. Andererseits hat man wieder 6n Bedingungsgleichungen, denen sie zu genügen haben. Man hätte also n—3 Bedingungsgleichungen mehr als von jenen Konstanten vorhanden sind, die wir im allgemeinen Fall als unbekannt ansehen mussten. Dies kann man z. B. so auffassen, dass man sagt, die gegenseitige Lage der kommenden Strahlen ist nicht ganz willkürlich, wenn es möglich sein soll, dass sämtliche Stosszentren zusammenfallen, sondern man darf nur so viele von den d_μ, von denen die gegenseitige Lage der Strahlen abhängt, willkürlich annehmen, dass die Anzahl der Konstanten, die in diesem Fall bestimmt werden müssen, und die Anzahl der Bedingungsgleichungen, denen sie genügen müssen, einander gleich ist. Wenn man es also mit drei kommenden Strahlen zu thun hat, so kann, wie man sofort sieht, im allgemeinen immer der Fall eintreten, dass die Stosszentren zusammenfallen, welche gegenseitige Lage der kommenden Strahlen auch angenommen werden mag. Wenn man es mit vier Str

zu thun hat, so darf man nur die gegenseitige Lage von dreien willkürlich annehmen, die des vierten ist dann bestimmt u. s. w. In allen diesen Fällen ist die Bewegung vollständig bestimmt, die Anzahl der jeweils möglichen Bewegungsarten ist eine endliche.

Wenn man es nur mit zwei Strahlen zu thun hat, so gilt dies natürlich nicht; denn dann bedeutet die Bedingung, dass nur ein einziges Stosszentrum vorhanden sein soll, keine Einschränkung, da so wie so immer nur ein einziges vorhanden ist.

Wenn man die Bedingung, dass die sämtlichen r verschwinden, in die allgemeinen Gleichungen einführt, so vereinfachen sich einige davon wesentlich. Aus II wird

$$(54)\quad \zeta = \frac{1}{G\,\zeta'^{\,n-1}} \quad \text{oder} \quad (55)\quad \zeta' = \sqrt[n-1]{\frac{1}{G\,\zeta}}.$$

Aus V_k wird

$$(56)\quad e^{i\gamma_k} = e^{-i(n-1)\gamma'_k} \quad \text{oder}$$

$$(57)\quad \gamma_k = -(n-1)\,\gamma'_k \quad \text{oder} \quad (58)\quad \gamma'_k = -\frac{\gamma_k}{n-1}.$$

Aus den Gleichungen VI und VII, bez. VI^a und VII^a erhält man:

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \cos\gamma'_k\right\} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \sin\gamma'_k\right\} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \cos 2\gamma'_k\right\} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \sin 2\gamma'\right\} = 0 \text{ bis}$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \cos(n-1)\,\gamma'_k\right\} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \sin(n-1)\,\gamma'_k\right\} = 0.$$

Wenn man für die Winkel γ'_k die Winkel γ_k einführt, so kann man diese Gleichungen folgendermassen zusammenfassen:

$$(59)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \cos\left(\frac{h}{n-1}\,\gamma_k\right)\right\} = 0 \text{ und}$$

$$(60)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k \sin\left(\frac{h}{n-1}\,\gamma_k\right)\right\} = 0$$

für $h = 1, 2 \ldots$ bis $n-1$.

Den Gleichungen (54), (57), (59) und (60) entsprechende hat Herr Voigt angegeben.

Mit Hilfe von (54) und (58) kann man den Parameter ζ' und die Winkel γ'_k aus den allgemeinen Gleichungen eliminieren; man erhält

jedoch keine wesentlich vereinfachten Formeln. Die Anzahl der Konstanten, welche noch berechnet werden müssen, ist 4n, also für drei Strahlen hat man 12 Konstante zu ermitteln. Man sieht, dass schon dieser Fall ein recht komplizierter ist. Wir wollen uns daher von jetzt an nur noch mit dem einfachsten Fall beschäftigen, dass man es nur mit zwei Strahlen zu thun hat; zunächst soll bewiesen werden, dass die von Herrn Voigt gefundenen Formeln sich aus unseren allgemeinen ableiten lassen, und dann soll ein besonders einfacher und interessanter, von Voigt nicht berücksichtigter, Fall eingehend diskutiert werden.

9.

Für den Fall des Stosses zweier Strahlen geht Gleichung (55) über in

(61) $\zeta' = \frac{1}{G\,\zeta}$ und Gleichung (58) in

(62) $\gamma'_k = -\gamma_k$.

Aus (I) erhält man:

(63) $$\Omega = \frac{G}{\pi} \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ (-1)^{k-1} \cdot C_k \cdot \lg \left(1 - \frac{e^{i\gamma_k}}{G\,\zeta} \right) \right\}.$$

Aus VIII) folgt

(64) $$\frac{G}{\pi} \lg \zeta \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ (-1)^k C_k \right\} = 0.$$

Durch Addition von (63) und (64) folgt

(65) $$\Omega = \frac{G}{\pi} \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ (-1)^{k-1} \cdot C_k \cdot \lg \left(\zeta - \frac{e^{i\gamma_k}}{G} \right) \right\}.$$

Aus Gleichung (III) erhält durch Elimination der γ'_k und von ζ':

(66) $$z = x_0 + iy_0 - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ (-1)^k C_k\, e^{i\gamma_k} \lg \left(\frac{1}{G\,\zeta} - e^{-i\gamma_k} \right) \right\}.$$

Herr Voigt hat angenommen, dass das Stosscentrum in den Koordinatenanfangspunkt fällt. Hiedurch und durch ihre Richtungen γ ist die Lage der kommenden Strahlen vollständig bestimmt; man darf also die Grössen d, die sich auf sie beziehen, nicht mehr willkürlich annehmen. Da der absolute Wert von ζ der Geschwindigkeit umgekehrt proportional ist, muss $\frac{1}{\zeta}$ an der Stelle verschwinden, wo die Geschwindig-

keit gleich Null ist. Obige Annahme bedeutet also, dass z und $\frac{1}{\zeta}$ gleichzeitig Null werden. Es folgt daher aus (66)

$$(67)\quad x_0 + iy_0 = -\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^k C_k \gamma_k e^{i\gamma_k}\right\} + \frac{\lg(-1)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^k C_k e^{i\gamma_k}\right\}.$$

Aus VI, VII und (62) folgt:

$$(68)\quad \sum_{k=1}^{k=2n}\left\{(-1)^k C_k e^{i\gamma_k}\right\} = 0;\ \text{daher wird}$$

$$(69)\quad x + iy_0 = -\frac{i}{\pi}\sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^k C_k \gamma_k e^{i\gamma_k}\right\}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (66) erhält man:

$$(70)\quad z = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^k . C_k e^{i\gamma_k} \lg\left(\frac{e^{i\gamma_k}}{G\zeta} - 1\right)\right\}.$$

Aus (68) folgt:

$$(71)\quad \sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^k C_k e^{i\gamma_k} . \lg(-\zeta)\right\} = 0.$$

Durch Addition von (70) und (71) erhält man:

$$(72)\quad z = \sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^{k-1} . C_k e^{i\gamma_k} \lg\left(\zeta - \frac{e^{i\gamma_k}}{G}\right)\right\}.$$

Aus (68) folgt:

$$(73)\quad \sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^{k-1} C_k \cos\gamma_k\right\} = 0 \text{ und}$$

$$(74)\quad \sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^{k-1} C_k \sin\gamma_k\right\} = 0.$$

Aus VIII erhält man:

$$(75)\quad \sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^{k-1} C_k\right\} = 0 \text{ und aus IX}$$

$$(76)\quad G\sum_{k=1}^{k=4}\left\{(-1)^{k-1} C_k \gamma_k\right\} - 2a_1\pi = 0.$$

Die Gleichungen (65), (72), (73), (74), (75) und (76) genügen zur Behandlung des Problems. Es ist nicht nötig, die Gleichungen hinzuzunehmen, die sich durch Umformung von IV ergeben.

Wenn man setzt: $G = \frac{1}{R}$; $C_1 = A_1$, $C_2 = B_1$, $C_3 = A_2$, $C_4 = B_2$; $\gamma_1 = -\alpha_1$, $\gamma_2 = -\beta_1$, $\gamma_3 = -\alpha_2$, $\gamma_4 = -\beta_2 = -2\pi$, so erhält man genau dieselben Formeln wie Herr Voigt. Die Verschiedenheit des Vorzeichens der Winkel ist bedingt durch den Umstand, dass Voigt die Winkel als positiv einführt. Ausserdem nimmt er an, dass die Strahlen B_1 und B_2 die kommenden, A_1 und A_2 die gehenden seien; er nimmt daher die Grössen B_1 und B_2, β_1 und β_2 als gegeben an und setzt den Winkel $\beta_2 = 2\pi$. Dadurch wird das Koordinatensystem erst vollständig festgelegt, die Allgemeinheit der Behandlung aber nicht gestört.

Es muss noch nachgewiesen werden, dass auch Gleichung (76) mit einer von Voigt aufgestellten identisch ist.

Man hat zunächst ausgeschrieben die Form:

$$C_1 \gamma_1 - C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 - G_4 \gamma_4 - 2a_1 . \pi . R = 0.$$

Aus Gleichung (6) erhält man

$$a_1 = b_2 - \pi . c_4 \text{ und aus Gleichung (47)}$$

$$c_4 = -\frac{C_4}{\pi . R}; \text{ daher ist}$$

$$a_1 = b_2 + \frac{C_4}{R}.$$

Durch Substitution dieses Wertes ergibt sich

$$C_1 \gamma_1 - C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 - C_4 \gamma_4 - 2 b_2 . \pi . R - 2 C_4 \pi = 0.$$

Wir setzen nun für die C und die γ die oben angegebenen Werte ein; es wird dann

$$- A_1 \alpha_1 + B_1 \beta_1 - A_2 \alpha_2 + B_2 \beta_2 - 2 b_2 . \pi . R - 2 B_2 . \pi = 0.$$

Da $\beta_2 = 2\pi$ ist, so bekommt man schliesslich

(77) $A_1 \alpha_1 - B_1 \beta_1 + A_2 \alpha_2 + 2\pi . b_2 . R = 0.$

Bis auf das Vorzeichen von b_2 ist dies die Voigt'sche Formel. Der Unterschied kommt daher, dass die Grösse b_2 bei uns dasjenige Vorzeichen besitzt, das Voigt ihr ursprünglich gab, nämlich im vorliegenden Falle das negative, während Voigt an einer späteren Stelle das Vorzeichen von b_2 willkürlich änderte, um b_2 als positive Grösse betrachten zu dürfen.

Im übrigen ist vielleicht die Bemerkung gestattet, dass für die Berechnung von Beispielen weder die Gleichung (76)), noch überhaupt Gleichung (IX) irgend welchen praktischen Wert besitzt, da der Grösse

a_1, die durch sie in der Rechnung eingeführt wird, eine einfache Bedeutung für das behandelte Problem nicht zukommt.

10.

Es soll nun noch ein einfaches, besonders interessantes Beispiel behandelt und damit zugleich die Brauchbarkeit der Gleichung IV bewiesen werden. Wir wollen uns vorstellen, dass zwei Strahlen einander in direkt entgegengesetzter Richtung treffen, und zwar so, dass der Abstand ihrer Mittellinien vor dem Stoss gleich d ist. Wir nehmen an, dass die Strahlen 2 und 4 die kommenden seien, und setzen $\gamma_2 = -\pi$, $\gamma_4 = -2\pi$. Gegeben sind noch C_2, C_4, die Breiten der Strahlen, und ihre Geschwindigkeit im Unendlichen, G. Das Stosscentrum soll im Koordinatenanfangspunkt liegen. Es gelten also die Formeln, die im vorigen Abschnitt für den Stoss von zwei Strahlen abgeleitet wurden. Dazu kommt die wichtige Beziehung

(78) $d_2 + d_4 = d$.

Denn der Abstand der Mittellinien beider Strahlen ist gleich der Summe der Differenz der Abstände jedes Strahles vom Koordinatenanfangspunkt. Wenn man die richtigen Vorzeichen erhalten will, so muss man beachten, dass die d_μ in derselben Richtung positiv gerechnet werden müssen wie die früher benützten Koordinaten y_μ. In unserem Falle ist aber y_4 in derselben, y_2 in der entgegengesetzten Richtung positiv zu rechnen wie die Axe y. (Vgl. die ersten Zeilen des vierten Abschnitts).

Die ersten vier Glieder in Gleichung IV haben die Eigenschaft, dass sie einfach ihr Vorzeichen wechseln, wenn man einmal $\gamma_\mu = \gamma_2 = -\pi$ und dann $\gamma_\mu = \gamma_4 = -2\pi$ setzt. Da μ in diesen Gliedern blos als Index von γ vorkommt, so tragen sie zum Wert von d nichts bei. Wenn man unter Benützung von (62) $\gamma'_\mu = -\gamma_\mu$ setzt, so erhält man

$$d = \frac{\gamma_2}{\pi} \sum_1^4 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_2) \right\} + \frac{\gamma_4}{\pi} \sum_1^4 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_4) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^1 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_2) \right\} + \frac{1}{2} \sum_1^3 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_4) \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_3^4 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_2) \right\} - \frac{1}{2} \sum_5^4 \left\{ (-1)^k C_k \cos(\gamma_k - \gamma_4) \right\}.$$

Das letzte Glied ist natürlich gleich Null, da das Zeichen $\sum_5^4$ nichts anderes besagt, als dass kein einziges Glied angeschrieben werden

soll. Wenn man die Werte von γ_2 und γ_4 einführt, so kann man die zwei ersten Glieder zusammenziehen und erhält:

$$2d = -\sum_1^4 \left\{ (-1)^k C_k \cos \gamma_k \right\} - \sum_1^1 + \sum_1^3 + \sum_3^4$$

$$= -\sum_1^4 + \sum_2^3 + \sum_3^4$$

Unter die Summenzeichen ist immer wieder derselbe Ausdruck zu schreiben. Explizit hat man:

$2d = C_1 \cos \gamma_1 - C_2 \cos \gamma_2 + C_3 \cos \gamma_3 - C_4 \cos \gamma_4 + C_2 \cos \gamma_2 - C_3 \cos \gamma_3 - C_3 \cos \gamma_3 + C_4 \cos \gamma_4$ oder

(79) $C_1 \cos \gamma_1 - C_3 \cos \gamma_3 = 2d.$

Aus (73), (74) und (75) erhält man:

(80) $C_1 \cos \gamma_1 + C_3 \cos \gamma_3 = C_4 - C_2;$

(81) $C_1 \sin \gamma_1 + C_3 \sin \gamma_3 = 0;$

(82) $C_1 + C_3 = C_2 + C_4.$

Aus diesen Gleichungen hat man C_1, C_3, γ_1 und γ_3 zu berechnen. Aus (79) und (80) folgt

(83) $C_1 \cos \gamma_1 = \frac{C_4 - C_2}{2} + d$ und

(84) $C_3 \cos \gamma_3 = \frac{C_4 - C_2}{2} - d.$ Aus (81) folgt

$C_1^2 \sin^2 \gamma_1 = C_3^2 \sin^2 \gamma_3$ oder

(85) $C_1^2 - C_3^2 = C_1^2 \cos^2 \gamma_1 - C_3^2 \cos^2 \gamma_3.$

Durch Substitution von (83) und (84) erhält man

$$C_1^2 - C_3^2 = \left(\frac{C_4 - C_2}{2} + d\right)^2 - \left(\frac{C_4 - C_2}{2} - d\right)^2 \text{ oder}$$

(86) $(C_1 + C_3)(C_1 - C_3) = (C_4 - C_2) \cdot 2d.$

Durch Division mit (82) ergibt sich

(87) $C_1 - C_3 = \frac{C_4 - C_2}{C_4 + C_2} 2d.$

Aus (82) + (87) erhält man

(88) $C_1 = \frac{C_2 + C_4}{2} - \frac{C_2 - C_4}{C_2 + C_4} \cdot d.$

Aus (82) − (87) erhält man

(89) $C_3 = \frac{C_2 + C_4}{2} + \frac{C_2 - C_4}{C_2 + C_4} \cdot d.$

Durch Einsetzen dieser Werte in (83) und (84) ergibt sich

$$(90)\quad \cos\gamma_1 = \frac{(C_4 - C_2 + 2d)\,(C_2 + C_4)}{(C_2 + C_4)^2 - 2d\,(C_2 - C_4)} \quad \text{und}$$

$$(91)\quad \cos\gamma_3 = \frac{(C_4 - C_2 - 2d)\,(C_2 + C_4)}{(C_2 + C_4)^2 + 2d\,(C_2 - C_4)}.$$

Mit Hilfe der letzten vier Gleichungen lassen sich alle Konstanten berechnen. Wenn man $d = 0$ setzt, so muss die Bewegung symetrisch zur x-Axe verlaufen. Setzt man $d = \pm \frac{1}{2}(C_2 + C_4)$, so darf überhaupt kein Stoss mehr erfolgen, sondern die Strahlen müssen, ohne sich zu treffen, aneinander vorbeifliessen. Man überzeugt sich leicht, dass dies wirklich der Fall ist.